KUCHSIZ-SINGULYAR INTEGRAL OPERATORLAR UCHUN SHARTLANGAN ITERATSION METODLARNI TADQIQ QILISH

Raximov Quvvatali Ortiqovich
texnika fanlari bo‘yicha falsafa doktori, dotsent, FarDU
Omonova Shoxsanam Toxirjon qizi
1-bosqich tayanch doktorant, FarDU

Annotatsiya
Mazkur ishda kuchsiz-singulyar yadroli ikkinchi tur Fredgolm integral tenglamalarini sonli yechish masalasi qaraladi. Integral operatorlarni diskretlashtirish natijasida hosil bo‘ladigan chiziqli algebraik sistemalarni yechishda shartlangan iteratsion metodlarning samaradorligi o‘rganiladi. Diskret sistemalarning spektral xossalari, shartlanganlik darajasi hamda shartlashning iteratsion jarayonlar yaqinlashishiga ta’siri tahlil qilinadi. Tadqiqot natijalari kuchsiz-singulyar integral operatorlar uchun samarali sonli algoritmlar yaratishda nazariy asos bo‘lib xizmat qilishi mumkin.

Kalit so‘zlar: *Fredgolm integral tenglamasi, kuchsiz-singulyar yadro, integral operator, diskretlashtirish, iteratsion metod, shartlash, GMRES, BiCGSTAB.*

1. KIRISH

Integral tenglamalar matematik fizika, mexanika, elektromagnit maydonlar nazariyasi, potensiallar nazariyasi va boshqa ko‘plab amaliy fanlarda uchraydigan muhim matematik modellar hisoblanadi. Ayniqsa, ikkinchi tur Fredgolm integral tenglamalari turli chegaraviy masalalarni yechishda keng qo‘llaniladi.

Ko‘plab amaliy masalalarda integral operator yadrosi singulyar yoki kuchsiz-singulyar xususiyatga ega bo‘ladi. Bunday hollarda tenglama quyidagi ko‘rinishga ega:

$$u(x)-\int_a^b K(x,t)u(t)dt=f(x)\ , \qquad x\in[a,b]. \tag{1}$$

Agar yadro

$$K(x,t)=\frac{g(x,t)}{|x-t|^{\alpha}}, \qquad 0<\alpha<1 \tag{2}$$

ko‘rinishda bo‘lsa, u holda yadro kuchsiz-singulyar deyiladi. Bunday yadrolar integralning mavjudligiga xalaqit bermasa ham, sonli hisoblashlarda qo‘shimcha qiyinchiliklarni yuzaga keltiradi.

Hozirgi vaqtda katta o‘lchamli hisoblash masalalarida iteratsion metodlardan keng foydalanilmoqda. Biroq kuchsiz-singulyar operatorlardan hosil bo‘ladigan diskret sistemalar ko‘pincha yomon shartlangan bo‘ladi. Natijada klassik iteratsion metodlarning yaqinlashish tezligi sezilarli darajada pasayadi. Shu sababli shartlangan iteratsion metodlarni tadqiq qilish dolzarb ilmiy masalalardan biri hisoblanadi.

2. Muammoning qo‘yilishi

Quyidagi ikkinchi tur Fredgolm integral tenglamasini qaraymiz:

$$u(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt=f(x). \tag{3}$$

Bu yerda $u(x)$ - izlanayotgan funksiya, $f(x)$ - berilgan funksiya, λ - parametr va $K(x,t)$ - integral operator yadrosidir.

Kuchsiz-singulyar yadro uchun

$$K(x,t)=\frac{g(x,t)}{|x-t|^{\alpha}}, \qquad 0<\alpha<1.$$

Bu yerda $g(x,t)$ yetarlicha silliq funksiyadir. Yadroning singulyarligi $x=t$ nuqtada kuzatiladi va aynan shu holat sonli hisoblashlarni murakkablashtiradi.

Integral tenglamani operator ko‘rinishda

$$(I-\lambda A)u=f \tag{4}$$

deb yozish mumkin. Bu yerda

$$(Au)x=\int_a^b \frac{g(x,t)u(t)}{|x-t|^{\alpha}}dt. \tag{5}$$

Sonli yechim olish uchun $[a,b]$ kesma tugunlarga bo‘linadi:

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b. \tag{6}$$

Nyström, kollokatsiya yoki kvadratur metodlari yordamida integral operator diskret operator bilan almashtiriladi va natijada

$$A_n u_n=f_n \tag{7}$$

ko‘rinishdagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi.

Diskretlashtirish jarayonida diagonal elementlar yaqinida singulyarlik tufayli maxsus kvadratur formulalardan foydalanishga to‘g‘ri keladi. Bundan tashqari, hosil bo‘lgan matritsaning shartlanganlik soni katta bo‘lishi mumkin:

$$\kappa(A_n)=\|A_n\|\|A_n^{-1}\|. \tag{8}$$

Bu esa sonli hisoblashlarning barqarorligiga salbiy ta’sir ko‘rsatadi.

3. Tadqiqotning maqsadi va vazifalari

Tadqiqotning asosiy maqsadi kuchsiz-singulyar integral operatorlarni approksimatsiyalash natijasida hosil bo‘ladigan diskret sistemalarni yechishda shartlangan iteratsion metodlarning samaradorligini o‘rganishdan iborat. Mazkur maqsadga erishish uchun quyidagi vazifalar belgilangan:

- kuchsiz-singulyar integral operatorlarning nazariy xossalarini o‘rganish;
- integral tenglamalarni diskretlashtirish usullarini tahlil qilish;
- klassik iteratsion metodlarni tadqiq etish;
- shartlashning yaqinlashish tezligiga ta’sirini o‘rganish;
- hisoblash tajribalarini o‘tkazish;
- turli metodlarni iteratsiyalar soni, xatolik va hisoblash vaqti bo‘yicha taqqoslash.

4. Tadqiqot metodologiyasi

Tadqiqot funksional analiz, integral tenglamalar nazariyasi, operatorlar nazariyasi va hisoblash matematikasi usullariga asoslanadi.

Nazariy tahlilda Fredgolm nazariyasi, kompakt operatorlar nazariyasi hamda integral operatorlarning spektral xossalaridan foydalaniladi. Sonli tadqiqotlarda esa Nyström va kollokatsiya metodlari yordamida integral operatorlarning diskret approksimatsiyasi quriladi.

Hosil bo‘lgan chiziqli sistemalarni yechishda Yakobi, Gauss–Zeydel, GMRES va BiCGSTAB kabi iteratsion metodlar qo‘llaniladi. Bundan tashqari, diagonal, ILU (Incomplete LU) va boshqa shartlash usullarining samaradorligi o‘rganiladi.
Hisoblash tajribalari MATLAB yoki Python dasturiy muhitlarida amalga oshirilishi rejalashtirilmoqda.

5. Shartlangan iteratsion metodlar

Diskret sistemalar uchun iteratsion metodlarning samaradorligi ko‘p jihatdan matritsaning spektral xossalariga bog‘liq. Agar matritsa yomon shartlangan bo‘lsa, iteratsiyalar soni ortadi va hisoblash xarajatlari ko‘payadi.

Bu muammoni bartaraf etish uchun shartlash usuli qo‘llaniladi. Bunda boshlang‘ich sistema

$$A_n u_n = f_n$$

o‘rniga

$$M_n^{-1} A_n u_n = M_n^{-1} f_n \tag{9}$$

ko‘rinishdagi ekvivalent sistema qaraladi.

Bu yerda M_n shartlovchi matritsa bo‘lib, u A_n matritsaga ma’lum ma’noda yaqin bo‘lishi kerak. Shartlashning asosiy maqsadi matritsaning spektral xossalarini yaxshilash va iteratsion jarayonning yaqinlashishini tezlashtirishdan iborat.

Zamonaviy ilmiy adabiyotlarda GMRES, BiCGSTAB va Conjugate Gradient metodlarini turli shartlovchilar bilan birgalikda qo‘llash yaxshi natijalar berishi ko‘rsatilgan.

6. Kutilayotgan ilmiy natijalar

Tadqiqot natijasida shartlashning kuchsiz-singulyar integral operatorlardan hosil bo‘ladigan diskret sistemalar uchun samaradorligi nazariy va sonli jihatdan asoslab berilishi kutilmoqda.

Jumladan:

- matritsalarning shartlanganlik soni kamayishi;
- spektral xossalar yaxshilanishi;
- iteratsiyalar soni qisqarishi;
- hisoblash vaqti kamayishi;
- sonli yechimning barqarorligi oshishi

ko‘rsatilishi rejalashtirilmoqda.

7. Muhokama

Kuchsiz-singulyar integral operatorlarni sonli yechishda asosiy xavf faqat singulyarlikning mavjudligi emas. Asosiy xavf — singulyarlikning diskret matritsa strukturasiga ta’siri, diagonal elementlar atrofidagi noto‘g‘ri approksimatsiya va shartlanganlik sonining ortishidir. Agar diagonal elementlar maxsus kvadraturalar orqali hisoblanmasa, yuqori tartibli iteratsion metod ham noto‘g‘ri natija berishi mumkin.

Shuningdek, GMRES va BiCGSTAB metodlarini oddiy holda qo‘llash yetarli emas. Ularni shartlovchi bilan birga ishlatish kerak. Lekin shartlovchi tanlashda uchta mezon muhim hisoblanadi:

- shartlovchi A_n ga yetarlicha yaqin bo‘lishi;
- M_n^{-1} amalini hisoblash samarali bo‘lishi;
- shartlangan matritsaning spektri qulay joylashishi.

Diagonal shartlovchi oddiy va tez, lekin kuchli singulyar holatlarda zaif. ILU shartlovchi kuchliroq, ammo zich matritsalar uchun xotira va vaqt sarfi oshishi mumkin. Spektral shartlovchi nazariy jihatdan samarali, lekin katta o‘lchamli sistemalarda amaliy xarajati yuqori.

XULOSA

Kuchsiz-singulyar yadroli ikkinchi tur Fredgolm integral tenglamalarini sonli yechishda diskretlashtirish sifati, diagonal yaqinidagi singulyarlikni hisobga olish va hosil bo‘lgan algebraik sistemaning shartlanganlik darajasi hal qiluvchi omillar hisoblanadi. Oddiy kvadraturalar va shartlanmagan iteratsion metodlar bunday masalalarda ko‘pincha yetarli samaradorlik bermaydi.

Shartlangan GMRES va BiCGSTAB metodlari kuchsiz-singulyar integral operatorlardan hosil bo‘ladigan yomon shartlangan sistemalarni yechishda istiqbolli yondashuv hisoblanadi. Diagonal, ILU va spektral shartlovchilar yordamida matritsaning spektral xossalarini yaxshilash, qoldiq normasini tezroq kamaytirish va iteratsiyalar sonini qisqartirish mumkin. Biroq har bir shartlovchi uchun hisoblash xarajati, xotira sarfi va barqarorlik alohida baholanishi kerak.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Atkinson K.E. *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*. – Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
2. Kress R. *Linear Integral Equations*. – 3rd ed. – New York: Springer, 2014.
3. Saad Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. – Philadelphia: SIAM, 2003.
4. Shoukralla E.S., Saber N., Sayed A.Y. Computational method for solving weakly singular Fredholm integral equations of the second kind // *Advances in Modeling and Analysis of Engineering Systems*. – 2021. – Vol. 8, No. 4. – P. 1–15.
5. Shoukralla E.S., Saber N. The Numerical Solutions of Weakly Singular Fredholm Integral Equations of the Second Kind Using Chebyshev Polynomials of the Second Kind // *Petroleum Engineering and Natural Gas Journal*. – 2024. – P. 1–18.
6. Greenbaum A. Iterative Methods for Solving Linear Systems. Philadelphia: SIAM, 1997.

G‘ulomjanova Sevaraxon G‘ofurjon qizi

19 THE INVERSE-SOURCE PROBLEM FOR MIXED-TYPE EQUATIONS
Murolimova N.A. **99**

20 INVERSE COEFFICIENT PROBLEM FOR A DEGENERATE PARABOLIC EQUATION WITH THE BESSEL OPERATOR
Kodiraliev Asadbek **102**

21 A BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A COUPLED SECOND KIND DEGENERATE HYPERBOLIC EQUATIONS
Feruza Mamanazarova **106**

22 YUPQA PARDALAR TENZOQARSHILIGIGA TA'SIR ETUVCHI OMILLAR TAHLILI
To‘xtasinov Oybekjon Abduvahob o‘g‘li **110**

23 YARIMO‘TKAZGICHLAR VA IOT (INTERNET OF THINGS): RAQAMLI DUNYO TARMOG‘INING RIVOJI
To‘xtasinov Oybekjon Abduvahob o‘g‘li **113**

24 СВОЙСТВА СЛОЕВ НА ОСНОВЕ ОКСИДА МОЛИБДЕНА ДЛЯ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ГАЗОВЫХ ДАТЧИКОВ
Д.М.Ташланова
А.И.Зокиров **115**

25 FARG‘ONA VODIYSI IQLIM SHAROITIDA QUYOSH PANELLARI ISHLASH SAMARADORLIGIGA TA'SIR ETUVCHI ASOSIY OMILLARNING KOMPLEKS TAHLILI
Axmedova Shalola Yunusali qizi
Kamolova Muhabbatxon Muhiddin qizi
Holmatova Ruhshona **119**

26 TOR TEBRANISH TENGLAMASI UCHUN INTEGRAL SHARTLI MASALA
Jo‘rayeva Dilnavoz Umidjon qizi **126**

27 BESSEL OPERATORI QATNASHGAN ITERATSIYALANGAN ISSIQLIK TENGLAMALARINI TADQIQ ETISH
Raximova Sh.U. **129**

28 KUCHSIZ-SINGULYAR INTEGRAL OPERATORLAR UCHUN SHARTLANGAN ITERATSION METODLARNI TADQIQ QILISH
Raximov Quvvatali Ortiqovich **131**

Omonova Shoxsanam Toxirjon qizi

29 РАЗРАБОТКА ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ПОСАДКИ ОДЕЖДЫ НА ВИРТУАЛЬНОМ МАНЕКЕНЕ
Каримбердиева Мохинур Шерзод кизи **135**

30 UCHINCHI TARTIBLI BITTA SINGULYAR KOEFFITSIYENTGA EGA BO‘LGAN DIFFERENSIAL TENGLAMA UCHUN CHEGARAVIY MASALA
Karimov Kamoliddin To‘ychiboyevich
Axmadjonova Nodiraxon Murodiljon qizi **138**