О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТИПА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ТРЕМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Муродова Мухлиса
Докторант 1-го курса базовой докторантуры
Ферганского государственного университета
e-mail: mxalimova2112@mail.ru
ORCID: 0009-0002-1993-4789

Аннотация
В работе исследована задача Дирихле для эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами в трёхмерной области. Для решения поставленной задачи использованы свойства оператора Бесселя, функции Бесселя первого рода и функции Макдональда. На основе многомерного преобразования Ханкеля получено интегральное представление решения. Доказана теорема существования решения задачи Дирихле при выполнении условий, наложенных на граничную функцию. Полученные результаты расширяют возможности применения интегральных преобразований при исследовании эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами.

Ключевые слова: *задача Дирихле, эллиптическое уравнение, сингулярные коэффициенты, оператор Бесселя, функция Бесселя, функция Макдональда, преобразование Ханкеля, интегральное представление решения, существование решения.*

Рассмотрим уравнение

$$(B^{x}_{\alpha-1/2}+B^{y}_{\beta-1/2}+B^{z}_{\gamma-1/2})u(x,y,z)=0,\quad (x,y,z)\in\Omega \quad (1)$$

в области $\Omega=\{(x,y,z): x\in(0;+\infty),\ y\in(0;+\infty),\ z\in(0;+\infty)\}$, где $u(x,y,z)$ - неизвестная функция, а $\alpha,\beta,\gamma\in R,$ причем $0<\alpha,\beta,\gamma<1/2.$

Для уравнения (1) в области Ω сформулируем и исследуем следующую задачу.

Задача D_{∞}. Найти решение уравнения (1) в области Ω, удовлетворяющие условиям

$$u(x,y,z)\in C(\bar{\Omega})\cap C^{2,2,2}_{x,y,z}(\Omega),\quad x^{2\alpha}u_x, y^{2\beta}u_y, z^{2\gamma}u_z\in C(\bar{\Omega}\cap\{x=0\}\cap\{y=0\}\cap\{z=0\})$$

$$|\lim_{x\to\infty}x^{2\alpha}u_x|<+\infty,\quad |\lim_{y\to\infty}y^{2\beta}u_y|<+\infty,\quad |\lim_{z\to\infty}z^{2\gamma}u_z|<+\infty$$

$$u(0,y,z)=0,\ \lim_{x\to+\infty}u(x,y,z)=0, y,z\in[0,+\infty),$$

$$u(x,0,z)=0,\ \lim_{y\to+\infty}u(x,y,z)=0, x,z\in[0,+\infty),$$

$$u(x,y,0)=f(x,y),\ \lim_{y\to+\infty}u(x,y,z)=0, z,y\in[0,+\infty),$$

где $\bar{\Omega}=\{(x,y,z): x\in[0,+\infty),\ y\in[0,+\infty),\ z=[0,+\infty)\}$, $f(x,y)$ –заданная непрерывная функция и выполняются условия согласования $f(0,y)=0,$ $f(x,0)=0,\ \lim_{x\to+\infty}f(x,y)=0,\ \lim_{y\to+\infty}f(x,y)=0,.$

Теорема. *Пусть* $\lambda,\mu\in(0,+\infty)$ *и функция* $f(x,y)$ *удовлетворяет следующим условиям*:

I. $f(x,y)\in C^{4,4}_{x,y}(\overline{\Pi})$, где $\Pi=\{(x,y):0<x<+\infty,0<y<+\infty\}$;

II. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\partial^j}{\partial x^j}f(x,y)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\alpha}\dfrac{\partial^j}{\partial x^j}f(x,y)=0$, $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\partial^j}{\partial y^j}f(x,y)=0$,

$\lim\limits_{y\to+\infty}y^{\beta}\dfrac{\partial^j}{\partial y^j}f(x,y)=0$, $j=\overline{0,3}$.

Тогда решение задачи D_{∞} *определяется формулой*

$$u(x,y,z)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\lambda\mu X_{\lambda}(x)Q_{\mu}(y)\tilde{u}_{\lambda\mu}(z)d\lambda d\mu,$$

где $X_{\lambda}(x)=x^{1/2-\alpha}J_{1/2-\alpha}(\lambda x)$, $Q_{\mu}(y)=y^{1/2-\beta}J_{1/2-\beta}(\mu y)$,

$\tilde{u}_{\lambda\mu}(z)=\overline{K}_{1/2-\gamma}(\chi z)f_{\lambda\mu}$, $f_{\lambda\mu}=\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}x^{1/2+\alpha}y^{1/2+\beta}f(x,y)J_{1/2-\alpha}(\lambda x)J_{1/2-\beta}(\mu y)dxdy$

и $\overline{K}_{\nu}(x)=2^{1-\nu}x^{\nu}K_{\nu}(x)/\Gamma(\nu),$*где* $(\nu>0)$, $J_{\nu}(x)$, $I_{\nu}(x)$ и $K_{\nu}(x)$ – функция Бесселя первого рода, функция Бесселя мнимого аргумента и функция Макдональда порядка ν [2] соответственно.

Вывод. В работе исследована задача Дирихле для эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами. С использованием многомерного преобразования Ханкеля, а также свойств функций Бесселя и функции Макдональда получено явное интегральное представление решения. Доказано существование решения поставленной задачи при выполнении условий согласования и гладкости граничной функции. Таким образом, метод преобразования Ханкеля является эффективным инструментом для исследования краевых задач для эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами.

ЛИТЕРАТУРА

1.Urinov A.K., Karimov K.T. Dirichlet problem for an elliptic equation with three singular coefficients// Journal of Mathematicyal Sciences. –2021. –V. 254, –No. 6. –P. 731-742.

2.Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. -М.: Физматлит. 1963. -358 с.